모든 교과서 · 수능 개념, 수능 심화, 논 · 구술까지 고등수학의 모든 것을 한권으로 정복한다!

한권으로 완성하는 수학

| 이해원 지음 |

미적분 (상)

(미적분1의 극한, 지수로그함수, 삼각함수, 극한과 미분)

시대인재 Books

만든이 Maker

저자 이해원
연세대학교 수학과 卒 & 성광고등학교 卒
네이버 대표카페 · 네이버 최대 이과 최상위권 커뮤니티 포만한 수학연구소 창립자
고려대학교 컴퓨터공학과 · 수학과 · 수학교육과 수리논술 합격자 (경쟁률 200:1)
2011.9 KICE 수학가형 100점(전국 만점자 28명), 2012 KICE 수학가형 100점(전국 만점자 300명)
2012 Xi-story 자이스토리 수학 수기 저자
케이블TV - <수학영역> 학습의 비법 출연

주요 저서
한권으로 완성하는 수학 시리즈 **(오르비 개념서 역사상 최대 베스트&스테디셀러, 2015년 조선일보 등재)**
이해원 모의고사 수학영역 시리즈 **(오르비 모의고사 역사상 최대 베스트&스테디셀러)**

저자가 주로 활동하는 곳 (닉네임: 난만한)
포만한 수학연구소 - **2015년 조선일보 맛있는 공부 등재**

수기 및 공부법 Review & Tip

한완수로 공부한 선배 및 검토자분들이 수험생들에게 전해주는 조언 · 공부법입니다. 한완수를 공부한 경험이 있고 이미 수능 수학에서 100점 및 1등급을 쟁취한 선배들의 말이므로 한완수를 학습하다 지칠 때, 한 번씩 읽어보면서 공부에 참고하시길 바랍니다.

2019 All New 한완수 검토자
김동현(경북대학교 의예과) 이시연(울산대학교 의예과)
남궁진(부산대학교 의예과) 손현동(영남대학교 의예과)
이성진(아주대학교 의학과) 김태훈(원광대학교 치의예과)
배영목(경북대학교 의예과) 정정우(서울대학 물리천문학부)
김동규(서울대학교 화생공) 유제민(서울대학교 수학교육)
한동엽(서울대학교 컴퓨터공학) 윤동관(성균관대 반도체공)
박윤수(한국교원대학교 수학교육과) 이재우(성균관대학교)
김문석(연세대학교 수학과) 가철순(연세대학교 수학과)
유영진(연세대학교 수학과) 양진철(연세대학교)
유동근(연세대학교 수학과 및 동대학원 석사과정)
정재권(카이스트 기계공학과 및 동대학원 석사 卒)
이지민 정태민 우영범 이재혁 김성현

검토자
임은성 김동하 박종혁 이덕영 김태영 김용욱 이현기 김경묵
김진세 한근희 김명식 윤현욱 홍현빈 곽진원 이정범 박경태
홍성훈 임정현 박천익 김희태 조해창 신승호 김환철 윤영진
전동기 원윤수 박준혁 최지헌 임동준 김도헌 이기준 강성서
박재효 우범준 박주혁 김은식 김철현 최홍서 정상현 김세훈
박재석 윤태원 장재훈 김태훈 임주현 박종훈 최지욱 김종운
곽호연 김희태

김동규(서울대학교 화학생물공학부)

이 책의 저자이신 이해원 님은 명실상부 입시 수학의 최고 실력자 중 한 분이십니다. 그렇기에 제가 한완수를 공부할 때 목표로 했던 것은 '이해원처럼 수학하기'였습니다. "직관은 필요없다"라는 말만 되풀이하는 사람들과 달리 직관을 중요시하되 논리적으로 항상 검증해보는 단계를 거치라는 저자 이해원 님의 말에 공감했기 때문입니다. 책에 적힌 대로, 해설집까지 한 글자 한 글자 빼놓지 않고 읽어가며 공부한 후 2017년에 있었던 평가원시험과 수능에서 모두 백분위 99 이상을 쟁취할 수 있었습니다.

한완수를 공부하실 때는 막연히 1등급을, 혹은 만점을 목표로 잡는 것보다는 '저자 이해원님처럼 수학하기'를 목표로 공부하시는 것을 추천해드립니다. 많은 분야에서 최고를 모방하는 것은 최고에 근접하기 위해 최선의 방법이라고 할 수 있습니다. 2019 수능대비 한완수는 기존의 한완수에 기초개념설명이 추가되는 등 많은 변화가 있었습니다. 수능에서 1등급을 받아온 저조차도 개념설명을 읽으며 기존의 개념을 다각도적으로 바라볼 수 있게 되었고 얻어가는 것이 많았습니다. 독자층이 다양하겠지만, 누구든지 겸손한 마음으로 쉬운 파트부터 해설까지 한 글자도 날림 없이 공부하셨으면 좋겠습니다. 어느 순간 저자의 노하우와 생각의 흐름이 독자 여러분의 머릿속에 함께할 겁니다.

그리고 이 이야기는 수험생활을 해보며 제가 따로 드리고 싶었던 말인데, 실수를 해도 좋은 성적을 받을 수 있도록 완벽하게 공부하셨으면 좋겠습니다. 수능 당일 날 컨디션이 안 좋아 실수를 한다고 해도 이를 커버할 수 있을 정도로 실력을 키워야 긴장도 덜 하고 더 높은 점수를 받으실 수 있을 것입니다. 책에 적힌 대로 공부했을 때 다른 책이나 강의들보다도 빠르게 수학 실력을 올릴 수 있다는 점에서 한완수는 최고의 책입니다.

이성진(아주대학교 의학과)

안녕하세요 작년에 이해원 모의고사를 검토하였고 요번에 2019 ALL NEW 한완수를 검토하게 된 아주대 의학과에 재학 중인 이성진입니다. 제가 2016년, 1년간의 수험생활 동안 수학을 공부하면서 가장 중요하게 생각 했던 것이 바로 실전개념, 그리고 기출의 중요성입니다. 2017학년도수능부터 시작해서, 수능 수학영역이 어려워지고 있습니다. 21, 29, 30번이라는 전형적인 킬러문제들 뿐만 아니라, 주관식 확통, 객관식 19, 20번 등등 절대로 쉽지 않은 문항이 출제되고 있습니다. 이런 현 수능의 출제트렌드에서 가장 중요한 것은 바로 수능 날 써먹을 수 있는 수능적 개념 그리고 아무리 강조해도 부족하지 않은 기출문제들입니다. 저는 요번에 한완수의 Part 1을 검토하였습니다. Part 1을 검토하면서 꼼꼼하게 모든 문장, 주석들을 다 읽으면서, 저는 이 파트가 수능의 기초를 닦는데 정말 완벽하다라는 생각이 들었습니다. 교과서 개념, 즉 기초부터 차근차근 책의 내용이 구성되어 있고, 실전상황에서 써먹을 수 있는 주옥같은 팁들이 책의 곳곳에 녹아내려 있습니다. 반드시 이 Part 1의 모든 문장, 주석들 해설들을 한글자, 한글자 음미하시기 바랍니다. 정말 개념이 탄탄해 진다라는 느낌이 절로 들것입니다. 또한 기출문제편의 문제들과 해설들도 정말 알차게 구성되어 있는데 특히 해설에서 정말 많은 것들을 배워 가실 수 있을 것입니다. 해설을 보면서 직접 느껴보시기 바랍니다. 수능 수학을 공부하는데 있어서 가장 중요한 것은 기초개념, 그리고 더 나아간 실전적인 수능개념, 그리고 이런 개념들이 고스란히 녹아있는 기출문제들입니다. 이러한 가장 중요한 것들을 다 담았기에 한완수는 이 책 하나로 기초부터 심화까지 모든 내용을 마스터 할 수 있습니다. 부디 새롭게 나온 한층 강화된 한완수를 통해 더더욱 힘들어지고 있는 수학영역에서 만점을 쟁취하시길 기원합니다. 수험생 여러분 파이팅입니다.

유제민(서울대학교 수학교육과)

안녕하세요. All New 한완수 미적분의 검토를 맡은 유제민입니다. (구) 한완수는 학생한테 '교과서 학습'을 맡기고 '수능 개념'을 다루고 '수능, 심화 특강'에서 여러 유용한 공식들을 외우는 것이 아닌 '수능 개념'을 연습하는 용도로 증명하고 이해하는 책이었습니다. 하지만, 이해원님의 수학 공부 가이드를 제대로 읽지 않고, 편하게 공부하고 싶은 몇몇 학생들이 이해하라고 한 내용조차 암기하듯이 공부하는 일이 없었던 것은 아닙니다.

또한, (구) 한완수에 있는 내용을 완전히 학습했다 하더라도 많은 책과 강사들이 강조하는 '교과서 학습'이란 여전히 추상적이고 잘 와닿지 않는 개념이었음은 분명합니다. 교과서가 중요하다는 말을 듣고 어렵게 구한 수학 교과서를 펼쳐보아도, 너무 간단한 개념과 예제 문제만 눈에 들어오고 금방 지루함을 느끼는 것이 대부분입니다. 큰 카테고리인 대단원에서 수학 개념을 설명하는 흐름, 쉬운 예제 문제가 중요한 것이 아니라 예제 문제의 풀이가 간단한 개념에 기초해서 이루어지고 있음을 이해하는 것이 올바른 교과서 학습에서 얻어야 하는 것임을 알고 있는 사람은 많지 않았습니다.

All New 한완수는 교과서 개념과 올바른 수학 공부법에 대한 가이드라인을 책에 추가하며, 말 그대로 '한권으로 완성하는 수학'이 되었습니다. 올바른 교과서와 수학 학습법에서, 선생님의 말씀이나 강의의 한 토막에서 깨닫거나 들었을 만한 중요한 내용이 흩어져있지 않고 이 책 '한'권에 다 담겨있었습니다. 책이 두꺼워진 만큼, 독자가 다른 길로 샐 수 없을 정도로 자세해지고 정교해진 책이 All New 한완수입니다.

부디 저자의 말을 잘 따라 진득하게 다섯 권의 책을 공부해 수시와 정시로 이루어진 힘든 대입의 과정에서 만족할 만한 결과가 있기를 기원하겠습니다.

이재우(성균관대학교 - 대학수학경시대회 은상 수상자)

'교과서가 중요하다.'

누구나 한번쯤은 들어보셨을 겁니다. 시중에 나와 있는 수많은 책들도 하나 같이 교과서의 중요성을 강조합니다. 하지만, 그런 책들도 막상 들여다보면 교과서 개념이 아닌 교과서에서 유도된 개념, 즉, 수능에 최적화된 개념으로 해설 하는 경우가 많습니다. 그렇다면 도대체 교과서가 왜 중요한 것일까요?

새롭게 개정된 한완수가 이에 대한 답을 가장 잘 주었다고 생각합니다.

교과서가 중요한 이유는 수능에 나오는 문제들의 이론이 교과서를 벗어나지 않기 때문입니다. 따라서 수험생이라면 교과서가 제시하는 이론과 논리를 제대로 학습할 필요가 있습니다. 하지만 수학적인 친숙함이 축적되지 않은 상태에서 모든 기출문제를 교과서의 논리만으로 풀어내기란 쉽지 않습니다. 이에 대해 한완수는 교과서 개념을 정확히 제시하며, 모든 기출 문제의 [교과서적 해법]을 제시합니다.

즉, 교과서 개념과 기출문제 사이에 논리적 비약이 없음을 증명합니다.

하지만 한완수는 [교과서 개념]에만 머물지 않습니다. 현실적으로 [교과서 개념]만 가지고서 수학 100점을 받는 것은 힘들기 때문에 100점을 맞기 위해 필요한 개념 즉, [교과서 개념]에서 나아간 [수능 개념]을 제시합니다. 그리고 그 [수능 개념] 또한 [교과서 개념]과 동떨어진 개념이 아님을 보여줍니다.

또한 한완수를 통해 대입 논술까지 대비할 수 있으니 말 그대로 '한권으로 완성하는' 책이라고 생각합니다. 만약 2019학년도 수능을 준비하는 여러분이 '한권으로 완성하는 수학'을 공부하시면서 책이 제시하는 흐름을 따라가고 그 과정에서 책에서 설명하는 대로 생각하는 힘을 기른다면 놀라운 결과를 얻게 되실 겁니다. 그렇게 될 수밖에 없도록 만들어진 책입니다.

손현동(영남대학교 의예과)

수학을 잘하는 많은 사람들이 기출분석이 중요하다고 말합니다. 하지만 기출분석이 무엇인지, 어떻게 하는지, 왜 하는지는 제대로 알기 힘든 것이 현실입니다. 그러나 한완수를 통해 개념부터 기출분석, 더 나아가 논술대비까지 한 번에 완성할 수 있다고 생각합니다. 이전의 한완수는 기출 문제를 한 번 이상 본 수험생들에게 적합한 책이었지만, 이번 All New 한완수 2019는 개념 학습 단계부터 봐도 무방할 만큼 개념 설명, 기출 분석 및 해설이 자세하고 친절하게 담겨 있고, 더불어 사고력을 길러줄 수 있는 심화 내용까지 다루고 있는 완벽한 책이 되었습니다. 책의 내용 뿐 아니라 편집 역시 좋아져서 가독성 측면에서도 향상되어 N회독을 하는데 있어 훨씬 좋아졌다고 생각합니다. 수험생활의 시작과 끝을 최고의 수능 수학 수험서인 한완수와 함께 하는 게 어떨까요?

정태민

가장 이상적인 수학공부법은 교과서랑 기출만 완전히 정복하는 것이지만, 그건 수학적인 머리가 우수하지 않다면 불가능하니 문제를 많이 풀면서 생각의 틀을 늘려 나가세요.

직관을 놓지 말고, 논리도 놓지 말고 머리를 열심히 쓰면서 한완수와 교과서, 그리고 다른 책들을 열심히 공부 하신다면 수능 시험장에서 당신이 원하는 점수를 쟁취할 수 있을 것입니다.

소개 Introduce

'한완수에 대하여'

1. 그 어떤 책, 강의보다 먼저 봐야 하는 책입니다.

수학에 대한 기본 마인드를 정립해주고, 교과서에 있는 개념과 교과서에는 없지만 수능에 자주 나오는 개념을 **어떻게 바라보고 어떻게 공부해야 하는지 [교과서 지도서]를 기반으로 가이드라인을 정확하게 잡아주는 책이기 때문에 반드시 최우선적으로 봐야하는 교재입니다.** 저자는 7차 수능을 시작부터 끝까지 10년간 직접 경험하였고, 대학교에서도 수학을 전공하였습니다. 그 경험을 바탕으로 [수능 수학 개념]을 어떻게 대해야 하는지 논리적/직관적으로 10년간 분석하고, 최상위권 네이버 대표 수학 카페를 창립하고 운영하며 꾸준히 통계조사를 하였습니다. 바로 그 통계 결과에 따라 비현실적인 방법이 아닌 수능 점수를 가장 확실하게 올릴 수 있는 [수능 수학 공부]에 대한 제대로 된 최고의 방향을 제시합니다.

2. 기출문제집을 따로 구할 필요가 없이 한완수의 문제만 공부하면 됩니다.

한완수에는 7차 평가원(2005~2018)기출이 빠짐없이 모두 수록되어 있고, 과거 기출(1994~2004)/교육청 문항도 [4점] 위주로 대부분 수록되어 있습니다. 또한 사관학교/경찰대 기출도 선별되어 수록되어 있기 때문에 한완수의 모든 문제를 완벽하게 다 풀면 기출문제집으로써 충분하며 따로 기출문제집이 필요 없습니다.

3. 수능 수학을 준비한다면, 다 제쳐두고 한완수의 [Part 1]과 [Part 2]부터 완벽하게 해야 합니다.

한완수를 보기로 했다면, 다른 [수능 개념]이 들어간 책이나 강의는 다 제쳐두고 한완수 모든 단원의 [Part 1]과 [Part 2] 부터 완벽하게 공부해야 합니다. 한완수는 수능에 대한 올바른 방향을 정확하게 제시해 줍니다. 앞으로 어떤 수학 공부를 해도 한완수에서 제시한 방향으로 계속해서 공부해나가야 수학 실력이 가장 효율적으로 상승하므로, 반드시 한완수부터 다 보셔야 합니다. [Part 1]과 [Part 2]부터 3회독 이상하여 완벽하게 하는 것을 최우선으로 하세요.

4. 수능을 준비하는 모든 학생이 볼 수 있습니다. 모든 교과서 개념을 빠짐없이 다룹니다.

1등급부터 4등급까지 모든 학생이 하나도 빠짐없이 [교과서 개념]을 익히고 [논리력]과 [직관력]을 키우는데 큰 도움이 될 것입니다. 그 등급 미만의 학생도 교과서를 병행하면서 한완수 모든 단원의 [Part 1]부터 공부를 시작할 수 있습니다.

5. 모든 Part에는 가이드라인이 있습니다. [교과서 지도서]를 기반으로 하였습니다.

수학을 올바른 방향으로 공부할 수 있도록 Part마다 가이드라인을 준비하여 공부 방법을 완벽하게 할 수 있도록 돕습니다. 정확한 지도법으로 제대로 공부해야 수능 수학 실력이 더 빠르고 확실하게 향상 됩니다.

6. 수능을 준비하면 [Part 1~2], 심화/논술까지 공부하면 [Part 1~4]에서 완벽하게 대비할 수 있습니다.

모든 [교과서 개념]을 포함한 수능 준비부터 해서 수능심화, 논술, 구술, 면접까지 모두 한완수가 담당합니다. [Part 3~4]와 [논술 기출문제]에서는 논구술, 수능 심화 수준까지 완벽하게 대비할 수 있도록 준비되어 있습니다. 수학은 처음부터 끝까지 안심하고 한완수를 메인으로 공부하세요.

서문 Preface

2012년에 처음으로 출판되어 많은 수험생들이 풀어주었고, 특히 상위권들에게 사랑을 받은 한완수가 새로운 한완수로 탈바꿈하였습니다. 물론 전체적인 방향은 동일하구요.

한완수는 교과서 수준의 내용은 먼저 공부해오도록 독자에게 맡기는 형태의 내용이었습니다.
기존 한완수의 내용이 3의 난도에서 최고난도인 5의 난도까지 다뤘다면 1~2의 내용을 추가해서 교과서(기본서) 수준의 내용도 함께 완성해갈 수 있도록 구성하여 1의 난도부터 5의 난도까지 책에서 모두 다룰 수 있도록 하였습니다. 교과서(기본서)를 잘 병행하면서 공부하여 3~5등급에서 1등급까지 올린 수많은 수험생부터, 1~2등급에서 100점까지 올린 수많은 수험생까지 모든 점수대에서 100점을 다수 배출한 책이지만 기본적인 내용을 공부하지 않고 공부하여 힘들어하는 수험생도 보았기 때문에 Part 1을 추가하게 되었습니다.

세상에 교과서를 대신할 수 있는 책은 존재하지 않습니다. 교과서의 내용이 곧 수능의 출제 범위이기 때문이죠. 하지만 안타깝게도 그것이 교과서만을 공부해서 100점을 맞을 수 있다는 것을 의미하지는 않습니다. 교과서는 수능 출제의 범위인 책일 뿐이지 학생들이 수능을 100점 맞기 위한 책은 절대 아니며 <u>**교과서만, 교과서의 내용만 공부하는 것은 매우 비현실적인 공부방법입니다. 이는 실제 통계조사에서도 확인이 되죠.**</u>
교과서의 내용만으로는 매우 알아내기 힘든 '공간도형과 회전'같은 내용이 수능과 평가원에 수도 없이 출제되었고, 심지어 14수능 직후 수학 최상위권 커뮤니티인 포만한 수학 연구소의 통계조사에서 100점자의 95% 이상이 29, 30번 중 적어도 하나를 교과서에는 없는 내용을 통해 문제를 풀어내기도 했습니다. 그 덕에 한완수가 조선일보에 나오기도 했었죠. 이러한 현상은 매년 일어나고 있습니다. **즉, 실제로 100점을 맞는 학생의 99.9%는 교과서 개념만을 학습하지는 않았다는 것입니다.** 여기서 '그러면 교과 외의 내용이 교과 내의 내용보다 더 중요한 것 아닌가요?'라고 묻는 수험생도 있겠는데, 그 답은 **교과 외가 더 중요한 것은 절대 아니라는 것, 여전히 교과서 내의 내용이 가장 중요하다는 것, 하지만 수능 점수를 위해 [교과서 개념]에서 나아간 [수능 개념]을 필요 최소한만 다루는 것**이라고 말할 수 있습니다. 그 교과서 내 개념인 [교과서 개념]을 빠짐없이 완벽하게 공부하고, 그 이후 수능에 직접적으로 도움 되는 [수능 개념]까지 이상적으로 공부할 수 있도록 하는 책이 바로 한완수입니다.

교과과정 내의 개념에 가장 큰 중요도를 두고 공부하면서, [수능 개념]을 조금씩 익숙하게 만들어나가는 과정에서 최고의 결과를 거둘 수 있으며, 이제껏 모든 수험생들이 그렇게 100점을 맞아왔습니다. 한완수는 시중의 모든 교과서 지도서를 참고하여 수능 성적 향상을 위한 가장 이상적인 지도법을 제시하며, **실제 최상위권 사이트를 창립 및 운영하며 '최상위권 학생들의 통계', '성적을 많이 올린 학생들의 통계' 자료를 기반으로 '어떤 학생이 100점을 받았는가?' '어떤 학생이 성적을 많이 올렸는가?'에 모든 것을 걸었습니다.** 교과과정의 내용에 가장 큰 중요도를 두라고 말했듯이 절대 등한시하지 말아야 할 가장 중요한 내용이며, 항상 교과과정 내의 풀이로 모든 문제를 풀어보려는 노력은 매우 중요합니다. 한완수를 제대로 공부한다면 [교과서 개념]과 [교과과정 내의 풀이]를 완성하는 것부터 시작하여, 수능을 위한 [수능 개념]까지 제대로 학습할 수 있을 것입니다. 또한 [수능 개념]을 학습하는 과정에서 교과과정의 개념을 더 단단히 할 수 있고, 결국은 [수능 수학 100점] 및 [논구술 및 심화 대비]까지 완벽하게 해낼 수 있을 것입니다.

서문이 지금은 이해가 되지 않더라도, **일단 '한권으로 완성하는 수학'을 선택했다면 이 책을 보고 성적을 올린 수많은 선배들을 믿고 공부를 시작하도록 하세요.** 책을 보면 모든 것이 명확해질 것입니다.

–저자 이해원–

thanks to 가족들, 경북대 · 연세대 친구들, 시대인재 오우석 대표님, 문충환 선생님, 포만한 수학연구소의 회원들

The cardinality of the natural numbers is denoted $\aleph_0$

차례 Contents

The cardinality of the natural numbers is denoted $\aleph_0$

공부법 Guide

학습 가이드 1

수능 100점을 목표로 하는 수험생은 일단 Part 1+2까지 완벽하게 공부하면 되는데, 한완수 전권의 Part 1을 3회독 이상하여 완벽하게 공부했다는 전제하에 Part 2를 봐야합니다. 마찬가지로 전권의 Part 1과 Part 2를 3회독 이상하여 완벽하게 한 사람만이 Part 3으로 넘어갈 수 있습니다. **대부분의 수험생은 아래와 같이 모든 한완수의 Part 1부터 다 공부하는 것이 우선입니다.**

잘못 된 공부: '한완수 미적분(상)의 Part 1 → 한완수 미적분(상)의 Part 2 → 한완수 미적분(상)의 Part 3 …'

① 올바른 공부: '한완수 미적분(상)의 Part 1 → 한완수 미적분(중)의 Part 1 → 한완수 미적분(하)의 Part 1 …'

위의 ①로 공부해야 서술을 온당하게 따라갈 수 있으며, 성적향상도 더 확실할 것입니다. **이미 수능 범위를 두 번 이상 공부한 '수능 응시 2등급 이상 or 평가원 모의고사 1등급 이상 수험생'이라면 다음과 같이 Part 1 + 2는 묶어서 공부해야 합니다.**

② 올바른 공부: '한완수 미적분(상)의 Part 1+2 → 한완수 미적분(중)의 Part 1+2 → 한완수 미적분(하)의 Part 1+2 …'

또한 **기초 커리큘럼인 ①을 따라간 학생도 Part 1을 3회독~4회독하여 완벽해지면 ②의 방식으로 공부 및 복습해야 합니다.**

학습 가이드 2

수능만이 목표라면 **Part 1, Part 2만 완벽하게 공부해도 100점을 맞기에 부족함이 없으니 그 부분을 최우선적으로 마스터해야 합니다.** Part 3,4는 조금 더 100점 맞을 확률을 높여주고 사고력・직관력을 극대화해주는 과정이지만 과한 면도 있기 때문에 '일단은' 수험인생에 없다고 생각하고 공부하셔도 됩니다. 각 Part의 앞에는 '가이드라인'이 존재하여 Part의 목표와 공부 방법에 대해서 자세히 배웁니다. 공부 방법과 관련한 '가이드라인'은 전 Part에 걸쳐서 매우 자세히 설명되어 있으며 앞으로 수능을 공부하면서 절대적인 가이드로 삼으셔야 합니다. 또한 **'가이드라인'과 '공부 방법' 페이지는 전부 책 윗부분에서 봤을 때, 색칠되어 있도록 디자인하여 언제든지 책 위를 보면 찾아볼 수 있도록 되어 있습니다. 수험생활을 보내며 필요할 때마다 볼 수 있도록 하기 위함입니다.**

수능 심화개념/구술/논술/면접까지 정복하는 것을 목표로 하는 수험생은 Part 3~4와 Part 3~4에 있는 기출까지 공부해야 하는데, 설령 논구술이 목표이더라도 Part 1~2를 먼저 완벽하게 공부하는 것이 최우선입니다. Part 1~2에서 근본적인 수학실력을 키우지 않으면 논구술만 따로 배우는 것은 의미가 없습니다. 또한 Part 1~2를 모두 3회독 이상하여 완벽하게 한 수험생은 수능이 목표라도 Part 3~4까지 공부하여도 됩니다. 마지막으로 강조하고 싶은 것은 수학 공부에 있어 소통은 매우 중요하다는 것입니다. 어떤 사람에게는 논리적인 풀이가 어떤 사람에게는 논리적이지 않을 수도 있는 것이며, 어떤 사람에게는 직관적으로 느껴지는 내용이 어떤 사람에게는 느껴지지 않을 수 있습니다. 여러 사람의 생각을 들어보고 또 자신의 의견을 말하며 소통하는 것은 수학에서 매우 중요합니다. 주변 친구들과 소통하거나, 그것이 힘들다면 **네이버 대표 최상위권 카페 포만한 수학연구소(pnmath.kr)에서 소통하는 것을 추천합니다. 한완수의 내용이나 수학 문제 등에 대해 토론하고 소통할 수 있으며 저자와도 소통할 수 있습니다.**

Part 1. 교과 개념의 완성

교과서의 개념을 꼼꼼하게 완성할 수 있도록 돕는 Part입니다.
수험생이 가질 수 있는 오개념을 확실하게 잡으면서 개념을 완성해 나갈 것이며
나아가 쉬운 문제/기출문제에 교과서의 내용을 적용하며 기본적인
수학 실력을 다질 수 있도록 할 것입니다.

가이드라인

1장. 미적분1의 극한

2장. 지수함수와 로그함수

3장. 삼각함수

4장. 극한과 미분

가이드라인

1 어떤 학생이 공부해야 하는가?

먼저 Part 1은 미적분1 전체를 적어도 한 번 쯤은 공부해본 학생을 기준으로 설명이 되어 있다.[1] 미적분1을 한 번이라도 공부한 적이 있다면 한완수 미적분을 바로 공부해도 된다. 굳이 **학생 등급으로 정하자면 1등급 ~ 4등급 정도면 바로 책을 봐도 되고, 5등급 이하라면 교과서를 병행하면서 해당 단원의 내용을 먼저 공부한 후에 한완수의 Part 1의 해당 단원을 공부하도록 하자.** 다음 표를 보면서 스스로를 진단해보자.

CHECK 솔직 자가 진단 표	한완수 미적분 Part 1 공부하기 전 자가 진단	
1	함수의 수렴과 발산을 구분할 줄 아는가?	○ / ×
2	연속의 정의를 아는가?	○ / ×
3	미분계수의 정의를 아는가?	○ / ×
4	도함수의 정의를 아는가?	○ / ×
5	사이값 정리를 알고 있는가? (증명 말고)	○ / ×
6	최대 · 최소의 정리를 알고 있는가? (증명 말고)	○ / ×
7	점 $(1,\ -2)$에서 곡선 $y=x^2+1$에 그은 접선을 미분을 이용하여 구할 수 있는가?	○ / ×
8	다항함수 $f(x)=x^3-3x^2+1$의 그래프를 그릴 수 있는가?	○ / ×
9	평균값 정리를 알고 있는가? (증명 말고)	○ / ×
10	몫의 미분법, 합성함수의 미분법 공식을 아는가? (증명 말고)	○ / ×
11	곡선 $y=x^4-6x^2-1$의 변곡점을 구할 수 있는가?	○ / ×
12	함수 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$의 그래프의 개형을 그릴 수 있는가?	○ / ×

위의 표에서 6개 이상의 ○가 있다면 한완수 Part 1을 공부하는데 지장이 없을 것으로 예측되지만 공부하면서 많이 힘들다면 언제든 교과서를 펼쳐서 해당 단원을 먼저 공부한 후에 진단 표를 다시 확인하고 Part 1을 공부하도록 하자. 또한 **위의 솔직 자가 진단 표는 앞으로 한완수를 공부하면서 가끔 보게 될 텐데 표의 내용에 대해 솔직하게 답을 해야 공부에 큰 도움이 될 것이다.**

2 Part 1의 목표

기본적으로 **교과서의 개념을 완벽하게 증명하고 이해한 후, 어디까지가 교과서 개념인지 명확하게 구분하고 그 개념을 통해서만 수능 기출문제의 [2점], [3점]부터 고난도의 [4점]까지 정복하는 것이 최종목표이다.**[2] Part 1에서는 대부분의 증명과정을 모두 직접 보여주고, 개념 상 주의해야 할 부분부터 기출문제의 풀이까지 전부 다 떠먹여 주는 것을 목표로 하고 있다. 그러니 **수험생 분들은 그냥 책을 차근히 따라가면서 이해하고 공부하기만 하면 된다.**

1) 교과서든, 기본서든, 기본 개념 강의든 뭐든 적어도 한 번 개념과 기초 문제를 공부한 것을 의미한다.

2) 적당한 난도의 [4점]까지만 다루고 최고난도 [4점]과 2017~2018 최신 기출은 Part 2에서 다루도록 한다.

Part 1

시대인재Books

3 교과서적 해법은 무엇인가?

미적분1의 개념을 잘 모른다면 교과서를 펴서 개념을 살피면서 같이 보도록 하자. 먼저 미적분1의 다음 문제를 풀어본 후에 밑의 설명을 보자.[1)]

EX01

곡선 $y=x^2+x$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기를 미적분1 교과서에 수록된 풀이로 구하시오.

대부분의 학생이 어렵지 않게 주어진 함수 $f(x)=x^2+x$를 미분하여 $f'(x)=2x+1$라 한 후 $x=1$를 대입하여 접선의 기울기 $f'(1)=2(1)+1=3$이라 구했을 것이다. 그런데 교과서에 실린 풀이 중 또 다른 풀이도 있는데 대부분은 잘 모를 것이고 별로 중요하게 생각하지도 않을 것이다.

미적분1에서 다항함수의 미분법이 시작되면 **평균변화율의 정의**를 배우고,[2)] 바로 다음 **미분계수의 정의**를 배운다.

교과서 개념 **미분계수(순간변화율)** 미적분1 | 교과서 개념

① 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

② '$f'(a)$가 존재한다.'와 '$f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다.'는 동치

여기까지 배운 후 즉시 다음과 같은 예제 문제를 풀어보는 것이 모든 교과서에서의 순서이다. **위처럼 교과서 본문의 개념을 [교과서 개념]이라 약속하자.**

EX02

함수 $f(x)=x^2+x$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하시오.

이 문제를 교과서에서는 다음과 같이 해결한다.

[풀이] – EX02

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(1+\Delta x)^2+(1+\Delta x)\}-\{1^2+1\}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+3\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\{\Delta x+3\}=3$$

다들 $f'(x)=2x+1$이라고 도함수를 구한 후 $f'(1)=3$으로 구하면 되지 저렇게 고생해서 계산하나 싶을 수도 있다. 하지만 교과서의 진행 상 아직 함수 x^2의 도함수에 대해서 배운 적도 없으며 심지어 '도함수'가 뭔지 조차 배운 적이 없다. 그런데 아직 배우지도 않은 정리를 끌고 와서 문제를 푸는 것은 전혀 올바르지 못하기 때문에 위의 풀이와 같이 **이제껏 배운 정의 및 정리로만 해설을 하는 것이다.**[3)]

1) 미적분1의 기본적인 내용만 공부한 정도면 충분하다. 만약 가이드라인에 있는 문제가 풀리지 않을 경우 **당장 교과서로 돌아가서 미적분1의 '다항함수의 미분법' 단원까지 공부하고 오도록 하자.**

2) **평균변화율의 정의**
함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

3) 여기서 아니 나는 더 빨리 풀 수 있는 정리를 아는데 왜 그렇게 풀어!? 라고 생각하지 말고 천천히 서술을 따라가면서 공부하세요.

다항함수의 미분법에서 배운 정의 및 정리는 현재 '평균변화율의 정의' '미분계수' 밖에 없는 상황인데 이 상황에서 EX01을 풀 수 있을까?

사실 아직까지도 풀 수 없는 것이 정상이며 다음과 같은 정의를 하나 더 배우고 나서야 비로소 EX01을 풀 수 있게 된다.

교과서 개념 **미분계수와 접선의 기울기** 미적분1 | 교과서 개념

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$가 존재할 때, $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

이제껏 미분법에서 배운 정의 및 정리는 '평균변화율' '미분계수' '미분계수와 접선의 기울기'밖에 없다고 가정하고 EX01을 다시 풀어보도록 하자. 전 페이지에서 배운 **'미분계수'**와 방금 배운 **'미분계수와 접선의 기울기'**를 이용하여 완성한 EX01의 풀이는 다음과 같다.

[풀이] – EX01

'미분계수의 정의'에 의하여

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(1+\Delta x)^2+(1+\Delta x)\}-\{1^2+1\}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+3\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\{\Delta x+3\}=3$$

이다. 또한 '미분계수와 접선의 기울기'에 의하여 $f'(1)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기와 같으므로

(구하는 접선의 기울기)$=f'(1)=3$

여기서 여러분들이 깨달을 수 있는 것은 이제껏 배워온 **정의 및 정리가 어디까지냐에 따라 풀이가 달라질 수 있으며**, 그 배우는 선이 중요하다는 것이다. 그렇다면 수능에서 말하는 **[교과서적 해법]**이란 무엇일까?

[교과서적 해법]은 바로 모든 교과서 본문[1]에서 배우는 '정의 및 정리'까지만을 이용하여 완성한 논리적인 풀이를 의미하며, 이는 수능 문제를 출제할 때 출제자가 반드시 검토하는 부분이기도 할 것이다.[2] 이제 **모든 교과서 본문의 정의 및 정리를 기준**으로 EX01의 가능한 **[교과서적 해법]**을 스스로 완성해 보자.

EX01

곡선 $y=x^2+x$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기를 미적분1 교과서에 수록된 풀이로 구하시오.

1) 탐구활동, 생각 넓히기, 지도서, 예제 문제로 있는 정의 및 정리는 교과서 본문의 내용이라 할 수 없으나 고1, 고2 교과서에서 배우는 간접범위에 있는 교과서 본문의 정의 및 정리는 출제될 수 있다. 그래서 미적분1의 정의 및 정리도 미적분2에서 모두 활용되는 것이다.

2) 교과서 본문에서 배운 정의 및 정리로만 문제가 해결되지 않을 경우 평가원은 엄청난 논란에 휩싸일 것이 뻔하기에... **단, 그것이 모든 교과서 본문 내용과 정리만 죽어라 반복한다고 수능을 잘 본다는 것을 의미하지는 않는다.**

이처럼 함수의 극한의 성질을 통해 EX02를 풀어 봤는데 이를 일반화한 성질도 교과서에 소개가 되어 있으므로 이를 **미정계수의 결정**이라 부르고 하나의 [교과서 개념]으로 알아두도록 하자.

교과서 개념 **미정계수의 결정** 미적분1 | 교과서 개념

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 의 극한 값이 존재할 때, $\lim_{x\to a}g(x)=0$ 이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$ 이다.

($x\to a\pm$, $x\to\pm\infty$ 일 때도 성립한다.)

미정계수의 결정의 증명과정은 결국 EX02의 풀이와 같은데,

'$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 이 존재하고, $\lim_{x\to a}g(x)=0$ 일 때, $\lim_{x\to a}f(x)$ 의 값은?'

이 문제를 푸는 것과 같은데 이런 풀이과정을 억지로 외우는 것은 공부에 전혀 도움이 되지 않는다. **중요한 순간이 어떤 순간인지 체크하고, 필연성을 부여하는 것이 굉장히 좋은 공부 방법**이다. 올바른 사고과정을 정리해보면 다음과 같다.[1)]

논리적 사고과정

① $\lim_{x\to a}g(x)=0$ 이면 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 에서 $f(x)$ 가 어디로 가까이 가야 수렴할지 직관적으로 고민해보는 것이 우선이다. $g(x)$ 가 0 으로 가는데 $f(x)$ 가 $\pm\infty$ 나 0 이 아닌 상수 c 로 가면 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 이 발산한다는 것은 직관적으로 쉽게 추측할 수 있다. 즉, 최소한 수렴한다는 사실은 알 수 있으므로 정확한 값을 구하려고 시도해보자.

② 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$ 이 존재한다는 것을 ①에서 예측했고, 정확히 구해보는 것이 목표이므로 '함수의 극한에 대한 성질'을 적용해야 한다고 생각할 수 있다.

③ '함수의 극한에 대한 성질'에서 핵심 내용은 '모두 수렴하는 함수'로 표현해야 lim 를 분배할 수 있다는 것이다.

④ 그렇다면 문제에 주어진 수렴하는 함수가 무엇인지 정리해야 그것들을 이용해서 변형할 수 있다.

⑤ 문제에 주어진 수렴하는 함수는 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=k$ 와 $\lim_{x\to a}g(x)=0$ 이다.

⑥ $f(x)$ 를 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 와 $g(x)$ 로 표현하는 방법은 무엇일까?

⑦ $f(x)=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\times g(x)$ 로 표현할 수 있다.

⑧ $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\times g(x)\right\}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\times\lim_{x\to a}g(x)=(k)(0)=0$

1) 평소에 어떤 문제를 풀더라도 ①~⑧까지의 사고과정처럼 올바른 사고과정을 반복하고 정리해야 한다. 이런 생각을 반복해야만 수학실력 향상이 있고 아무 생각 없이 문제만 풀어나가면 기계적으로 문제만 푸는 바보가 될 뿐이다.
본인의 심리를 정확하고 냉철하게 분석해서 '논리적 사고과정'을 무한 반복하는 연습을 반드시 해야 한다.

이와 같이 어떤 증명을 공부할 때, 모든 과정이 필연적이 될 수 있도록 스스로 사고과정을 정리해야 공부에 도움이 된다.[1)] 증명을 공부할 때 외우는 것이 아니라 스스로 필연성과 사고과정을 완성해본 후, 핵심을 짚어보면 그것으로 충분하다. 이렇게 필연성을 부여해보는 것은 실제 수학공부에서 매우 중요하고, 단순 서술된 증명을 외우는 것은 크게 도움이 안 됨을 명심하자. **증명을 제대로 공부할 생각이 있다면 반드시 모든 증명을 다음과 같이 공부하도록 하자.**

TIP 저자의 특강 **증명을 공부하는 방법**

문제 풀이 전 직관적으로 결과를 예측해보는 것은 풀이에 도움이 될 수 있다. 증명을 공부할 때에는 2가지가 중요하다. **첫 번째는 증명과정에서 핵심이 되는 포인트가 있다. 그 포인트는 기억하는 것**이 좋다.
두 번째는 증명과정의 필연성과 사고과정을 스스로 정리해보는 것이다.
위의 ①, ②, ③을 보면 과정이 굉장히 필연적인 것을 알 수 있다.
뒤늦게 부여한 필연성일 수 있지만, 그렇게라도 필연성을 부여해서 풀이를 완성해보는 것 자체가 수학 공부에 크게 도움이 될 것이다.

여기 첫 줄에서

'문제 풀이 전 직관적으로 결과를 예측해보는 것은 풀이에 도움이 될 수 있다.'

라고 했는데, '미정계수의 결정' 증명과정에서 확인해보면 다음과 같다.

교과서 개념 **미정계수의 결정** 미적분1 | 교과서 개념

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 의 극한 값이 존재할 때, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$이다.

($x\to a\pm$, $x\to\pm\infty$ 일 때도 성립한다.)

을 볼 때, 다음과 같이 보는 것이다.

$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$인 상황에서 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 의 값이 존재하려면 $f(x)$의 값이 어디로 가야 할까? 라고 스스로 예측해보는 것이다. 일단 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$라는 결과를 모르는 상태에서 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$가 ∞처럼 발산한다고 생각하면 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 에서 $g(x)$는 0으로 가기 때문에 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 이 발산한다는 것을 직관적으로 쉽게 알 수 있다. $\lim\limits_{x\to a}f(x)$가 어떤 0이 아닌 상수 c로 간다고 생각해봐도 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 이 발산한다는 것을 쉽게 알 수 있다.

이처럼 결과를 직관적으로 예측해보는 것은 문제 풀이에 매우 큰 도움이 되고 풀이 방향을 잡을 때 중요한 역할을 하는 경우가 많다.

이제 주석 2)에서 연습문제를 스스로 풀어보고 다음 페이지로 넘어가자.

1) 증명뿐 아니라 문제를 풀고 분석할 때에도 '논리적 사고과정'을 다 정리해보려고 노력해야만 수학실력이 제대로 늘 것이다.

2) 반드시 스스로 풀어보자.
[문제]
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ 일 때, $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$가 수렴하는지 발산하는지 판별하고, 수렴한다면 그 값을 구하시오.
[교과서적 해법]
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$에서 분자가 0으로 가는데 분모가 $\pm\infty$나 특정한 0이 아닌 상수로 수렴하면 극한값이 0이 되어야 하는 것을 직관적으로 쉽게 추측할 수 있다.
즉, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$이어야 함은 직관적으로 쉽게 추론할 수 있는데, 우리는 [교과서 개념]만 이용해서 완벽히 논리적으로 풀어야 [교과서적 해법]이라 부를 수 있다.
[교과서적 해법]을 항상 스스로 완성해보는 연습을 해야 한다.

$\lim\limits_{x\to a}g(x)$이 수렴한다는 것을 추론했으므로 이제 정확한 값을 구하기 위해서는 '함수의 극한에 대한 성질'을 적용해야 한다는 것을 알 수 있다. 수렴하는 두 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $f(x)$로 $g(x)$를 표현해보면

$g(x)=\dfrac{f(x)}{\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)}$ 이므로

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}}=\frac{0}{1}=0$$

이다. 이 문제에서 얻을 수 있는 개념을 정리하면 다음과 같다.

[수능 개념]–'미정계수의 결정 2'
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 극한 값이 존재하는데 그 값이 0이 아닐 때, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$이면 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$이다.

Part 1

시대인재Books

05 사고과정: Part 2:

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5$$

를 만족시킨다. 방정식 $f(x)=x$의 한 근이 -2일 때, $f(1)$의 값은? [2011.9]

06 사고과정: Part 2:

극한

$$\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)\}^2}{f(x^2)}=4$$

를 만족시키는 함수 $f(x)$를 <보기>에서 모두 고른 것은? [2008.6]

<보 기>

ㄱ. $f(x)=4|x|$

ㄴ. $f(x)=2x^2+2x$

ㄷ. $f(x)=x+\frac{4}{x}$

07 사고과정: Part 2:

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=5,\quad \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [2010.6]

08 사고과정: Part 2:

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=-11,\quad \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-9$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty} x f\left(\frac{1}{x}\right)$의 값을 구하시오. [2015.6]

09 사고과정: Part 2:

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [2016.9]

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{3x}=2$

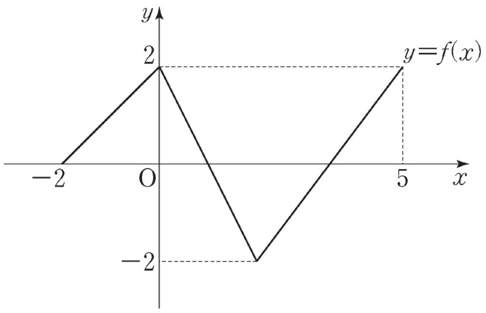
(나) $\lim_{x\to 0} f(x)=-7$

Part 1

시대인재Books

10 사고과정: Part 2:

닫힌 구간 $[-2, 5]$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{n\to\infty}\frac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3}=1$ 을 만족시키는 상수 a 의 개수는? [2013.6]

11 사고과정: Part 2:

함수 $f(x)$ 에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [2008.6]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$ 이면 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$ 이다.

ㄴ. $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$ 일 때, $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$ 이다.

ㄷ. $f(x)=|x-1|$ 이면 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$ 이다.

12 사고과정: Part 2:

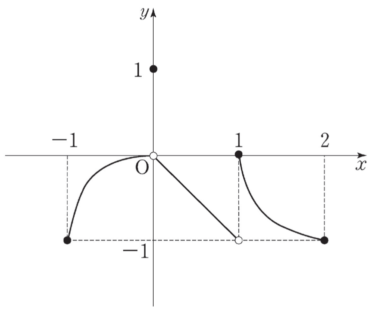
x 가 양수일 때, x 보다 작은 자연수 중에서 소수의 개수를 $f(x)$ 라 하고, 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x>2f(x)) \\ \frac{1}{f(x)} & (x\le 2f(x)) \end{cases}$$

라고 하자. 예를 들어, $f\left(\frac{7}{2}\right)=2$ 이고 $\frac{7}{2}<2f\left(\frac{7}{2}\right)$ 이므로 $g\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{1}{2}$ 이다. $\lim_{x\to8+}g(x)=\alpha$, $\lim_{x\to8-}g(x)=\beta$라고 할 때, $\frac{\alpha}{\beta}$ 의 값을 구하시오. [2011.6]

13 사고과정: Part 2:

닫힌 구간 $[-1, 2]$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같다.



닫힌 구간 $[-1, 2]$ 에서 두 함수 $g(x)$, $h(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x)+|f(x)|}{2}, \quad h(x)=\frac{f(x)-|f(x)|}{2}$$

으로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2010.6]

<보 기>

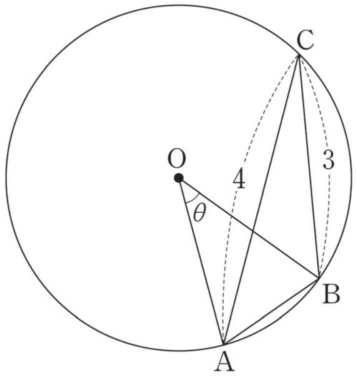
ㄱ. $\lim_{x\to1}h(x)$는 존재한다.

ㄴ. 함수 $(h\circ g)(x)$는 닫힌 구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to0}(g\circ h)(x)=(g\circ h)(0)$

기출예제05

그림과 같이 중심이 O 인 원 위에 세 점 A, B, C 가 있다.
$\overline{AC}=4$, $\overline{BC}=3$이고 삼각형 ABC의 넓이가 2이다.
$\angle AOB=\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$) [2014.6]



[교과서적 해법]

원주각/중심각의 성질에 의하여 $\angle ACB=\dfrac{\theta}{2}$이다. $\dfrac{1}{2}(4)(3)\sin\dfrac{\theta}{2}=2$에서

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{3},\ \sin\theta=\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

이 문제의 풀이에서 두 변과 끼인각을 알 때의 삼각형 넓이 공식 $\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$가 쓰였는데 수능 문제에서 삼각형의 넓이로 가장 많이 쓰이는 공식은 그냥 $\dfrac{1}{2}$×(밑변)×(높이)이다. 앞으로 삼각형 넓이가 나오면 즉시 다음을 떠올리자.

① $\dfrac{1}{2}$×(밑변)×(높이)　　② $\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$

여기까지 [해법]을 공부하고 다음 표를 확인한 후 다음 페이지로 넘어가자.[1)]

CHECK 솔직 자가 진단 표 — 극한과 미분 자가 진단

1	지수함수와 로그함수의 극한은 [밑에 따른 그래프]와 [함수의 극한에 대한 성질]이 중요하다는 것을 아는가?	○ / ×
2	무리수 e와 관련된 극한의 판정법과 구하는 순서를 아는가?	○ / ×
3	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$을 구할 수 있는가?	○ / ×
4	e^x, a^x, $\ln x$, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$의 도함수를 아는가?	○ / ×
5	삼각함수의 덧셈정리 공식을 외우고 있는가?	○ / ×
6	$x\to0$일 때, $\tan x/x$과 $(1-\cos x)/x^2$, $(\tan x-\sin x)/x^3$의 극한값을 [교과서적 해법]으로 구할 수 있는가?	○ / ×
7	도형과 관련된 삼각함수 극한 문제에서 중요한 3가지를 정확하게 서술할 수 있는가?	○ / ×
8	내접원, 외접원 등에 관한 성질은 모두 원의 성질로부터 유도할 수 있다는 것을 아는가? [2)]	○ / ×

1) 표에서 ×가 있다면 반드시 돌아가서 복습하고 오도록 하자.

2) 내접원의 성질은 전부 원 밖의 점에서 원에 그은 접선에 대한 성질이고, 외접원의 성질은 전부 원에서 현의 성질이다. 예를 들어, 삼각형의 외접원에서 각 변의 수직이등분선의 교점이 외접원의 중심이라는 성질은 그냥 원에서 현의 성질이다. 원의 중심에서 현의 내린 수선의 발이 현을 수직이등분하기 때문이다.

Part 1

시대인재Books

★ 합성함수의 연속성

연속성을 판단하는 문제 중 가장 복잡하고 어렵게 출제될 수 있는 개념이 합성함수의 연속성이다. 이에 대해 앞서 정리한 [수능 개념]은 다음과 같다.

합성함수의 불연속 후보 찾기 미적분1 | 수능 개념

합성함수 $g(f(x))$의 핵심은 f의 치역이 g의 정의역이 되는 것이다.
그에 따라 불연속 후보는 다음 2가지 종류이다.

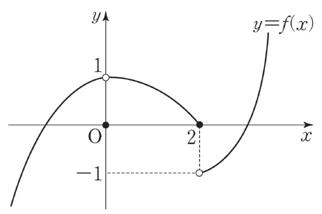
① $f(x)$가 불연속인 x

② $g(x)$가 불연속인 $x=a$에 대하여 $f(x)=a$의 실근

위 내용은 [교과서 개념]으로 유도할 수 있지만 두 후보를 정확하게 암기하고 있어야 하며 문제를 만나면 조금도 지체하지 않고 불연속 후보를 찾을 수 있어야 한다. 이는 미분가능성 문제에도 거의 똑같이 출제가 되고 있기 때문에 여기서 완벽하게 해두길 바란다. 다음 기출문제를 풀면서 연습해보자.

EX01

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고, 삼차함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 $g(0)=3$이다. 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(3)$의 값은? [2013]



[교과서적 해법]

구간별로 나누어서 연속의 정의를 생각하면 편한데 예를 들어 $(-\infty,\ 0)$에서는 $f(x)$가 연속이므로 연속함수 $g(x)$에 대하여 $g(f(x))$가 연속일 수밖에 없다. 정의역을 $-\infty$부터 0까지 점점 키워 가면서 대입하면 $f(x)$의 치역도 점점 커지는데 연속이므로 그 치역이 다시 정의역이 되는 함수인 $g(f(x))$이 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 연속이라는 말이다.

즉, 이 과정에서 $f(x)$의 치역이 곧 $g(x)$의 정의역이 되는 것인데, $f(x)$는 그 구간에서 연속이고 $g(x)$는 ($f(x)$의 치역) 구간에서 연속이므로 $g(f(x))$이 연속이 되는 것이다. 마찬가지로 두 구간 $(0,\ 2)$와 $(2,\ \infty)$을 생각해보면 함수 $g(f(x))$은 연속일 수밖에 없으므로 $g(f(x))$이 불연속일 가능성이 있는 점은 $x=0$, $x=2$밖에 없음을 알 수 있다. 즉, $x=0$과 $x=2$에 대해서만 연속의 정의로 확인하면 되는데 문제에서 실수 전체의 집합에서 연속이라고 했으므로 함수 $(g\circ f)(x)$가 $x=0$과 $x=2$에서 연속이라고 조건을 준 것이나 다름 없다. 이 2조건으로 문제를 끝까지 풀어나가면 정답이 27임을 알 수 있다.[1]

이처럼 교과서 개념에 따라 차근히 후보를 찾아나가면 상당히 복잡한 것을 알 수 있는데, 합성함수의 불연속 후보 찾기로 간단하게 찾아보면 다음과 같다.

1) $g(f(x))$의 $x=0$의 연속조건에서 $g(0)=g(1)$, $x=2$의 연속조건에서 $g(0)=g(-1)$이다. 즉, 문제에 주어진 $g(0)=3$과 최고차항의 계수가 1임을 이용하면 삼차함수 $g(x)$를 찾을 수 있다.

최신 기출문제 학습 방법

Part 1의 모든 문제, Part 2의 최신 기출문제 공부 시작 전 모든 문제를 풀어본 학생만 최신 기출문제를 풀어보길 바랍니다. 최신 기출문제는 [수능 대비]에 있어 가장 중요한 자료이기 때문에 아껴두었다가 개념 학습이 어느 정도 되고나서 풀어야 합니다. 개념 설명에 미리 최신 기출을 예제로 학습하는 우를 범하지 말길 바랍니다. 엄청난 소스를 버리는 것입니다. 최근 기출에 어떻게 출제되었는지 문제를 풀면서 최신 경향을 스스로 분석하고 해설에서 확인도 해보길 바랍니다.

[2017.6]

01 사고과정:

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x}-1}{3x}$ 의 값은? [4번]

02 사고과정:

함수 $f(x)=(2x+7)e^{x}$에 대하여 $f'(0)$의 값은? [5번]

[2017.9]

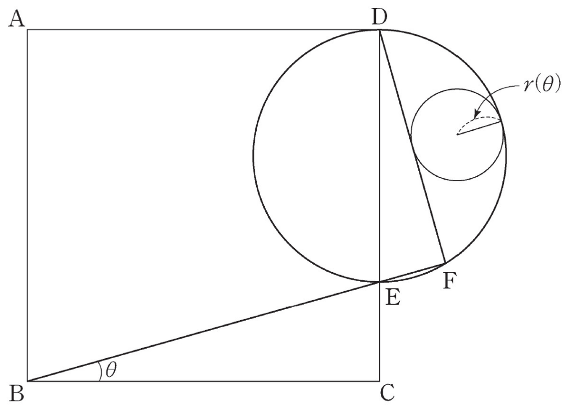
03 사고과정:

함수 $f(x)=\log_3 x$에 대하여 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$ 의 값은? [11번]

04 사고과정:

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 변 CD 위의 점 E에 대하여 선분 DE를 지름으로 하는 원과 직선 BE가 만나는 점 중 E가 아닌 점을 F라 하자. $\angle\mathrm{EBC}=\theta$라 할 때, 점 E를 포함하지 않는 호 DF를 이등분하는 점과 선분 DF의 중점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자.

$\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\dfrac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$ 의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [20번]



Part 2

[2017]

05

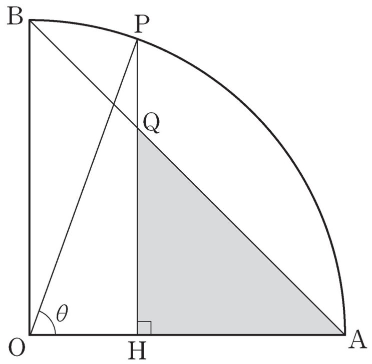
사고과정:

$\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{6x}-1}{\ln(1+3x)}$ 의 값은? [2번]

06

사고과정:

그림과 같이 반지름의 길이가 1 이고 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB 가 있다. 호 AB 위의 점 P 에서 선분 OA 에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH 와 선분 AB 의 교점을 Q 라 하자. $\angle\mathrm{POH}=\theta$ 일 때, 삼각형 AQH 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta^4}$ 의 값은? (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$) [14번]



[2018.6]

07

사고과정:

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$ 의 값은? [3번]

08

사고과정:

함수 $f(x)=e^x(2x+1)$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [5번]

09

사고과정:

그림과 같이 반지름의 길이가 1 이고 중심각의 크기가 θ 인 부채꼴 OAB 에서 호 AB 의 삼등분점 중 점 A 에 가까운 점을 C 라 하자. 변 DE 가 선분 OA 위에 있고, 꼭짓점 G, F 가 각각 선분 OC, 호 AC 위에 있는 정사각형 DEFG 의 넓이를 $f(\theta)$ 라 하자. 점 D 에서 선분 OB 에 내린 수선의 발을 P, 선분 DP 와 선분 OC 가 만나는 점을 Q 라 할 때, 삼각형 OQP 의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\dfrac{f(\theta)}{\theta\times g(\theta)}=k$ 일 때, $60k$ 의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 이고, $\overline{\mathrm{OD}}<\overline{\mathrm{OE}}$ 이다.) [28번]